

Računske operacije s kompleksnim brojevima

Osnovne računske operacije s kompleksnim brojevima izvodimo kao sa algebarskim izrazima vodeći pritom računa da je $i^2 = -1$.

Primjer 1: Zbrojimo, oduzmimo, pomnožimo i podijelimo kompleksne brojeve $z_1 = 4 - 5i$, $z_2 = -2 + 3i$.

$$z_1 + z_2 = 4 - 5i + (-2 + 3i) = (4 - 2) + (-5 + 3)i = 2 - 2i$$

$$z_1 - z_2 = 4 - 5i - (-2 + 3i) = 4 - 5i + 2 - 3i = (4 + 2) + (-5 - 3)i = 6 - 8i$$

$$z_1 \cdot z_2 = (4 - 5i)(-2 + 3i) = -8 + 12i + 10i - 15i^2 = -8 + 22i + 15 = 7 + 22i.$$

Za realan broj $a \geq 0$ vrijedi $\sqrt{-a} = \sqrt{a} \cdot i$

Zadatak: Izračunajte: $\sqrt{-9} + 3 + i\sqrt{16} - i\sqrt{-25}$.

Rješenje: $8 + 7i$.

Kako podijeliti dva kompleksna broja?

Primjer 2: Izračunajmo:

$$a) \frac{4-8i}{2} \qquad b) \frac{3-4i}{1+2i}$$

$$a) \frac{4-8i}{2} = \frac{4}{2} - \frac{8}{2}i = 2 - 4i \quad \text{brojnik podijelimo realnim brojem iz nazivnika}$$

b) $\frac{3-4i}{1+2i}$, kad pogledamo ovaj broj ne možemo odrediti njegov realni i imaginarni dio, zbog imaginarnog broja u nazivniku. Kako dobiti realan broj u nazivniku? Slično kao kod racionalizacije nazivnika proširujemo razlomak. Čime ćemo proširiti razlomak?

$$\frac{3-4i}{1+2i} = \frac{3-4i}{1+2i} \cdot \frac{1-2i}{1-2i} = \frac{3-6i-4i+8i^2}{1^2-(2i)^2} = \frac{-5-10i}{1-4i^2} = \frac{-5-10i}{5} = -1 - 2i$$

Kompleksan broj u nazivniku proširili smo s njegovim kompleksno konjugiranim brojem.

Potencije imaginarne jedinice

Izračunajmo prvih nekoliko potencija imaginarne jedinice.

$$\begin{array}{lll} i^0 = 1 & i^4 = i^3 \cdot i = 1 & i^8 = 1 \\ i^1 = i & i^5 = i^4 \cdot i = i & \vdots \\ i^2 = -1 & i^6 = i^5 \cdot i = -1 & \\ i^3 = -i & i^7 = i^6 \cdot i = -i & \end{array}$$

Primjećujemo da se vrijednosti periodički ponavljaju. Ako pogledamo koje su jednake primjećujemo da im se eksponenti razlikuju za 4. Dakle potencije imaginarne jedinice koje imaju jednak ostatak pri dijeljenju s 4 su jednake.

Vrijedi: $i^n = i^{4k+r} = i^r$, $r = \{0,1,2,3\}$, r je ostatak pri dijeljenju broja n s 4

Primjer 3: Izračunajmo: $a) i^{14}$

$b) i^{103}$

$c) i^{2025}$

$$a) i^{14} = i^{12} \cdot i^2 = (i^4)^3 \cdot (-1) = 1^3 \cdot (-1) = -1.$$

$$b) i^{103} = i^3 = -i, 100:4=25 \text{ i ostatak je } 3.$$

$$c) i^{2025} = i^1 = i.$$

Zadaci za DR:

1. Izračunaj: $a) (5 - 3i) + (2 + 6i)$ $b) (12 - 5i) + (4 - 8i)$

2. Izračunaj: $a) (2 - 3i) \cdot (5 + i)$ $b) (10 - 2i) \cdot (3 + 4i)$

3. Izračunaj: $a) \frac{18}{i}$ $b) \frac{5+i}{2i}$ $c) \frac{5-2i}{3+5i}$

4. Izračunaj: $a) i^{15}$ $b) i^{21}$ $c) i^{2020}$ $d) i^{62}$