

1.4. Kompleksni brojevi

Kompleksni brojevi

U skupu realnih brojeva nije uvijek dobro izvediva operacija potenciranja.

Razmislimo kad je izvediva, a kad nije.

Na primjer $(-1)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{-1}$ nije realan broj. Zato skup realnih brojeva proširujemo na novi skup brojeva.

Imaginarna jedinica je broj i za koji vrijedi $i^2 = -1$.

Umnožak realnog broja i imaginarne jedinice npr. $2i$, $-5i$, $0.5i$ je imaginarni broj.

Ako imaginarnom broju dodamo realni broj dobivamo brojeve oblika: $3 - 2i$, $-1 + \sqrt{2}i$, $1.4 - \pi i$, ... koje nazivamo **kompleksnim brojevima**.

Kompleksni brojevi su brojevi oblika $z = x + yi$, gdje su $x, y \in \mathbf{R}$, a i imaginarna jedinica.

x se naziva realni dio broja z , a y imaginarni dio broja z . Pišemo $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$.

Zapis $z = x + yi$ nazivamo **algebarski (standardni) zapis** kompleksnog broja z .

Skup svih kompleksnih brojeva označavamo s $\mathbf{C}$.

$$\mathbf{C} = \{x + yi : x, y \in \mathbf{R}, i^2 = -1\}$$

Primjer 1: Odredimo realni i imaginarni dio kompleksnih brojeva:

$$z_1 = 2 - 3i, z_2 = 2i - 5, z_3 = 15i, z_4 = 7, z_5 = \sqrt{3} - i, z_6 = 0.$$

$$z_1 = 2 - 3i \quad \text{Re } z_1 = 2, \text{Im } z_1 = -3.$$

$$z_2 = 2i - 5, \quad \text{Re } z_2 = -5, \text{Im } z_2 = 2.$$

$$z_3 = 15i, \quad \text{Re } z_3 = 0, \text{Im } z_3 = 15.$$

$$z_4 = 7, \quad \text{Re } z_4 = 7, \text{Im } z_4 = 0.$$

$$z_5 = \sqrt{3} - i, \quad \text{Re } z_5 = \sqrt{3}, \text{Im } z_5 = -1.$$

$$z_6 = 0, \quad \text{Re } z_6 = 0, \text{Im } z_6 = 0.$$

Primjer 2: Odredimo realni broj a tako da kompleksni broj $z = 3a + 9i$ ima jednak realni i imaginarni dio.

$\text{Re } z = 3a, \text{Im } z = 9$, a budući da realni i imaginarni dio moraju biti jednaki rješavamo
jednadžbu: $3a = 9$
 $a = 3.$

Dobili smo rješenje $a = 3$.

Jednakost kompleksnih brojeva

Dva kompleksna broja z_1 i z_2 su jednaka ako i samo ako imaju jednake realne i jednake imaginarne dijelove.

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow \operatorname{Re} z_1 = \operatorname{Re} z_2, \operatorname{Im} z_1 = \operatorname{Im} z_2.$$

Primjer 3: Odredimo realne brojeve a i b iz jednakosti kompleksnih brojeva:

a) $a + 4i = -2 + bi$

$$a = -2, b = 4$$

$$Rj(-2, 4)$$

b) $3a + bi = b + (a - 2)i$

$$3a = b$$

$$\underline{a - 2 = b}$$

.

.

$$Rj(-1, -3)$$

c) $3 + 4i = -2 + bi$

Jednadžba nije rješiva- ova dva broja nemogu biti jednaka jer su im različiti realni dijelovi.

Kompleksno konjugirani brojevi

Za kompleksan broj $z = x + yi$, broj $\bar{z} = x - yi$ nazivamo kompleksno konjugirani broj broja z .

Primjer 4: Odredimo kompleksno konjugirane brojeve sljedećih brojeva:

$$z_1 = 2 + 3i, \quad z_2 = -1 - \sqrt{3}i, \quad z_3 = 4, \quad z_4 = 2i, \quad z_5 = 0.$$

Rješenje: $\overline{z_1} = 2 - 3i, \quad \overline{z_2} = -1 + \sqrt{3}i, \quad \overline{z_3} = 4, \quad \overline{z_4} = -2i, \quad \overline{z_5} = 0.$

Zadaci za DR:

1. Odredi realni i imaginarni dio kompleksnih brojeva:

$$a) z_1 = 2 - 3i \quad b) z_2 = 5i - 1 \quad c) z_3 = 4 \quad d) z_4 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

2. Odredi kompleksno konjugirane brojeve slijedećih brojeva:

$$a) z_1 = 4 - 3i \quad b) z_2 = 5i - 1 \quad c) z_3 = 2 \quad d) z_4 = -\frac{1}{2}i.$$

3. Odredite realne brojeve **a** i **b** iz jednakosti kompleksnih brojeva:

$$a) 3 + (a - b)i = a + b - 3i, Rj. (0, 3) \quad b) a(1 + 2i) - b(2 + i) = 3i, Rj. (2, 1)$$