1.4.Kompleksni brojevi

Imaginarna jedinica i je broj za koji vrijedi $i^2 = -1$.

Imaginarni brojevi su brojevi oblika yi, pri čemu je y realan broj, a i je imaginarna jedinica.

Npr. Imaginarni brojevi su: ***2i, -5i, 0.5i, 10i*** itd.

Primijetimo da je zbroj dvaju imaginarnih brojeva također imaginaran broj. Primjerice, $3i + 105i = 108i$. Ako imaginarnom broju dodamo realan broj, dobivamo brojeve: $2 + 3i$, $-1 + \pi i$, $-1-1.23i$… koje nazivamo kompleksnim brojevima.

Kompleksni brojevi su svi brojevi oblika

$$z = x + yi,$$

gdje su x i y realni brojevi, a i imaginarna jedinica.

Broj x je **realni dio**, a y **imaginarni dio** kompleksnog broja z. Pišemo $x = \mathrm{Re}\, z$, $y = \mathrm{Im}\, z$.

Zapis $z = x + yi$ nazivano **algebarski ili standardni oblik** kompleksnog broja z.

Skup svih kompleksnih brojeva označavamo s $\boldsymbol{C}$.

Dakle, $\boldsymbol{C} = \{z = x + yi : x, y \in \boldsymbol{R}, i^2 = -1\}$

Primjer 1.

Odredimo realni i imaginarni dio kompleksnih brojeva: $z_1 = 3 + 33i$, $z_2 = 2i - 5$, $z_3 = 123i$, $z_4 = 15$, $z_5 = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{3}{4}i$, $z_6 = 0$.

Rješenje

z	Re z	$Im\ z$
$z_1 = 3 + 33i$	3	33
$z_2 = 2i - 5$	-5	2
$z_3 = 123i$	0	123
$z_4 = 15$	15	0
$z_5 = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{3}{4}i$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{3}{4}$
$z_6 = 0$	0	0

Primjer 2: Odredimo realni broj ***a*** tako da kompleksni broj ***z=3a + 9i*** ima jednak realni i imaginarni dio.

$Re\ z = 3a$, $Im\ z = 9$, a budući da realni i imaginarni dio moraju biti jednaki rješavamo jednadžbu

$3a = 9$

$a = 3.$

Dobili smo rješenje $a=3$.

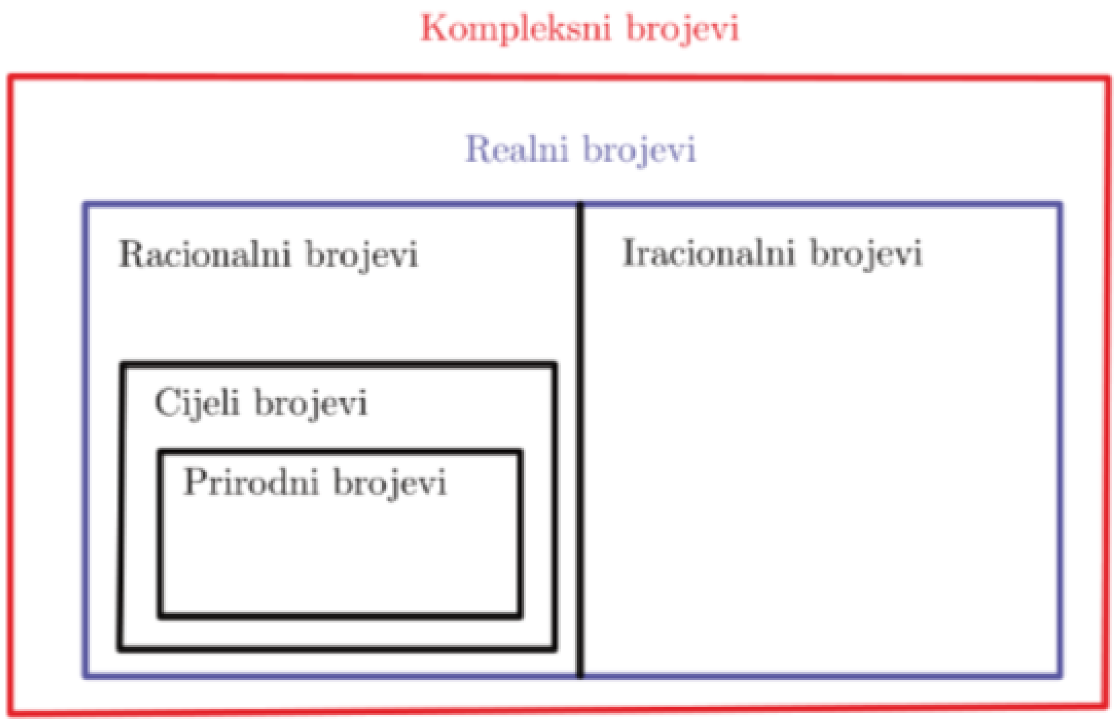
Zadatak 1:

Odredimo realan broj a za koji kompleksan broj $z = a(a-3) + (2a-4)i$ ima jednak realan i imaginaran dio.

Rješenje

S obzirom na to da $\mathrm{Re}\ z = a(a-3)$ i $\mathrm{Im}\ z = 2a - 4$ moraju biti jednaki, rješavamo jednadžbu $a(a-3) = 2a - 4$.

$a^2 - 5a + 4 = 0$, pa je $a \in \{1, 4\}$.



$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

$\mathbb{I} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

• Jednakost kompleksnih brojeva

Dva su kompleksna broja z_1 i z_2 jednaka ako i samo ako imaju iste realne i iste imaginarne dijelove.

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow \operatorname{Re} z_1 = \operatorname{Re} z_2 \text{ i } \operatorname{Im} z_1 = \operatorname{Im} z_2$$

Primjer 3.

Odredite realne brojeve a i b iz jednakosti $3a + (2 - b)i = -6 - 4i$.

Rješenje

Kompleksni broj $z_1 = 3a + (2 - b)i$ jednak je kompleksnom broju $z_2 = -6 - 4i$ pa ćemo izjednačiti njihove realne i imaginarne dijelove.

$3a = -6$

$2 - b = -4$

Slijedi da je $a = -2$ i $b = 6$.

Zadatak 2: Odredite realne brojeve a i b iz jednakosti $4(a - 2b) + (a - b)i = 4 + 2i$.

Rješenje: $a = 3$, $b = 1$.

Jednakost kompleksnih brojeva

Za kompleksan broj $z = x + yi$, broj $\overline{z} = x - yi$ nazivamo kompleksno konjugirani broj broja z.

Primjer 4: Odredimo kompleksno konjugirane brojeve sljedećih brojeva:

$$z_1 = 2 + 3i, \quad z_2 = -1 - \sqrt{3}i, \quad z_3 = 4, \quad z_4 = 2i, \quad z_5 = 0.$$

Rješenje: $\overline{z_1} = 2 - 3i$, $\overline{z_2} = -1 + \sqrt{3}i$, $\overline{z_3} = 4$, $\overline{z_4} = -2i$, $\overline{z_5} = 0$.

Pokažimo čemu je jednak umnožak dvaju kompleksno konjugiranih brojeva.
Neka je $z = x + yi$.

Tada vrijedi $z \cdot \overline{z} = (x + yi) \cdot (x - yi) = x^2 - (yi)^2 = x^2 + y^2$.

Ta će nam jednakost pomoći pri dijeljenju kompleksnih brojeva.

Računske operacije s kompleksnim brojevima

Osnovne računske operacije s kompleksnim brojevima izvodimo kao sa algebarskim izrazima vodeći računa pritom da je $i^2 = -1$.

Primjer 5.

Za kompleksne brojeve $z_1 = 3 + 4i$ i $z_2 = -2 + i$ odredimo $z_1 + z_2$, $z_1 - z_2$ i $z_1 \cdot z_2$.

Rješenje

$z_1 + z_2 = (3 + 4i) + (-2 + i) = 3 + 4i - 2 + i = (3 - 2) + (4 + 1)i = 1 + 5i$

$z_1 - z_2 = (3 + 4i) - (-2 + i) = 3 + 4i + 2 - i = (3 + 2) + (4 - 1)i = 5 + 3i$

$z_1 \cdot z_2 = (3 + 4i)(-2 + i) = -6 - 8i + 3i + 4i^2 = -6 - 5i - 4 = -10 - 5i$

$i^2 = -1$

Za realan broj $a \geq 0$ vrijedi $\sqrt{-a} = \sqrt{a} \cdot i$

Zadatak 4.

Izračunajte $\sqrt{-50} - 16 + i\sqrt{32} + \sqrt{225}$.

$$\sqrt{-50} - 16 + i\sqrt{32} + \sqrt{225} = \sqrt{25 \cdot 2 \cdot (-1)} - 16 + i \cdot \sqrt{16 \cdot 2} + 15 =$$

$$= 5\sqrt{2}i - 16 + 4\sqrt{2}i + 15 = (-16+15) + (5\sqrt{2}i + 4\sqrt{2}i) = -1 + 9\sqrt{2}i.$$

Primjer 7.

Izračunajmo.

a) $\dfrac{3-4i}{2}$ **b)** $\dfrac{3-i}{2+i}$

Rješenje

a) Kada kompleksan broj dijelimo realnim brojem, jasno nam je da ćemo i realan i imaginaran dio kompleksnog broja podijeliti s realnim nazivnikom.

$$\frac{3-4i}{2}=\frac{3}{2}-\frac{4i}{2}=\frac{3}{2}-2i\ .$$

b) Kako ćemo kompleksan broj podijeliti s kompleksnim brojem kojemu je imaginarni dio različit od nule? Možemo li zadatak svesti na prethodni? S čime možemo pomnožiti nazivnik da bismo poništili postojanje imaginarnog dijela?

Taj problem jako podsjeća na racionalizaciju nazivnika.

Prisjetimo se kako smo računali $\dfrac{3-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}$.

$$\frac{3-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}=\frac{3-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}\cdot\frac{2-\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}=\frac{\left(3-\sqrt{3}\right)\left(2-\sqrt{3}\right)}{2^2-\sqrt{3}^2}=\frac{6-2\sqrt{3}-3\sqrt{3}+3}{4-3}=9-5\sqrt{3}$$

Na sličan način izračunajmo količnik $\frac{3-i}{2+i}$.

$$\frac{3-i}{2+i}=\frac{3-i}{2+i}\cdot\frac{2-i}{2-i}=\frac{(3-i)(2-i)}{4-i^2}=\frac{6-2i-3i+i^2}{4+1}=\frac{5-5i}{5}=1-i\,.$$

Primijetimo da smo kompleksan broj u nazivniku proširili s njegovim kompleksno konjugiranim parom. Njihov je umnožak realan broj.

$$z\cdot\overline{z}=(x+yi)(x-yi)=x^2-(yi)^2=x^2-y^2\cdot i^2=x^2-y^2\cdot(-1)=x^2+y^2$$

Zaključimo: broj z_1 dijelimo s brojem z_2 ($z_2\neq 0$) tako da razlomak proširimo kompleksno konjugiranim parom kompleksnog broja u nazivniku.

Potencije imaginarne jedinice

Pogledajmo koliko iznose vrijednosti prvih nekoliko potencija imaginarne jedinice.

$$
\begin{array}{lll}
i^0 = 1 & i^4 = i^3 \cdot i = 1 & i^8 = 1 \\
i^1 = i & i^5 = i^4 \cdot i = i & \vdots \\
i^2 = -1 & i^6 = i^5 \cdot i = -1 & \\
i^3 = -i & i^7 = i^6 \cdot i = -i &
\end{array}
$$

Zamijetimo da se vrijednosti potencija periodički ponavljaju. Dovoljno je odrediti koji ostatak pri dijeljenju s 4 daje eksponent potencije. S obzirom na to da svaki prirodan broj n možemo zapisati kao $n = 4k + r$, pri čemu je k prirodan broj, a r je ostatak pri dijeljenju s 4, vrijedi:

$$i^n = i^{4k+r} = i^{4k} \cdot i^r = \left(i^4\right)^k \cdot i^r = 1^k \cdot i^r = i^r .$$

<u>Pr.8:</u> Izračunajmo: $a)\ i^{14}$ $b)\ i^{20}$ $c)\ i^{2021}$ $d)\ i^{59}$

a) $i^{14} = i^{12} \cdot i^2 = (i^4)^3 \cdot i^2 = 1^3 \cdot (-1) = -1$

ili $14 : 4 = 3$

$2 \rightarrow$ ostatak je 2, pa je $i^{14} = i^2 = -1$

b) $i^{20} = i^0 = 1$

$20 : 4 = 5$

$\underline{0} \rightarrow$ ostatak je 0

c) i^{2021}

$2021 : 4 = 505$, $i^{2021} = i^1 = i$

02

21

$1 \rightarrow$ ost

d) i^{59} , $59 : 4 = 14$, $i^{59} = i^3 = -i$

19

$3 \rightarrow$ ost

Treba znati...

- Imaginarna jedinica i je broj za koji vrijedi $i^2 = -1$.
- Kompleksni brojevi su brojevi oblika $z = x + yi$, gdje su x i y realni brojevi, a i imaginarna jedinica. Broj x je realni dio, a y imaginarni dio kompleksnog broja z.
  Pišemo $x = \mathrm{Re}\, z$, $y = \mathrm{Im}\, z$.
- Zapis $z = x + yi$ nazivamo algebarski ili standardni oblik kompleksnog broja z.
- Skup svih kompleksnih brojeva označujemo s $\mathbb{C}$.
- Dva su kompleksna broja jednaka ako i samo ako imaju jednake realne i jednake imaginarne dijelove.
- Za kompleksan broj $z = x + yi$ broj $\overline{z} = x - yi$ nazivamo kompleksno konjugirani broj broja z.