1.4.Kompleksni brojevi

Imaginarna jedinica i je broj za koji vrijedi $i^2 = -1$.

Imaginarni brojevi su brojevi oblika yi, pri čemu je y realan broj, a i je imaginarna jedinica.

Npr. Imaginarni brojevi su: ***2i, -5i, 0.5i, 10i*** itd.

Primijetimo da je zbroj dvaju imaginarnih brojeva također imaginaran broj. Primjerice, $3i + 105i = 108i$. Ako imaginarnom broju dodamo realan broj, dobivamo brojeve: $2 + 3i$, $-1 + \pi i$, $-1-1.23i$… koje nazivamo kompleksnim brojevima.

Kompleksni brojevi su svi brojevi oblika

$$z = x + yi,$$

gdje su x i y realni brojevi, a i imaginarna jedinica.

Broj x je **realni dio**, a y **imaginarni dio** kompleksnog broja z. Pišemo $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$.

Zapis $z = x + yi$ nazivano **algebarski ili standardni oblik** kompleksnog broja z.

Skup svih kompleksnih brojeva označavamo s $\boldsymbol{C}$.

Dakle, $\boldsymbol{C} = \{z = x + yi : x, y \in \boldsymbol{R}, i^2 = -1\}$

Primjer 1.

Odredimo realni i imaginarni dio kompleksnih brojeva: $z_1 = 3 + 33i$, $z_2 = 2i - 5$, $z_3 = 123i$, $z_4 = 15$, $z_5 = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{3}{4}i$, $z_6 = 0$.

Rješenje

z	Re z	$Im\, z$
$z_1 = 3 + 33i$	3	33
$z_2 = 2i - 5$	-5	2
$z_3 = 123i$	0	123
$z_4 = 15$	15	0
$z_5 = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{3}{4}i$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{3}{4}$
$z_6 = 0$	0	0

Primjer 2: Odredimo realni broj ***a*** tako da kompleksni broj ***z=3a + 9i*** ima jednak realni i imaginarni dio.

$Re\ z = 3a$, $Im\ z = 9$, a budući da realni i imaginarni dio moraju biti jednaki rješavamo jednadžbu
$3a = 9$
$a = 3$.
Dobili smo rješenje $a=3$.

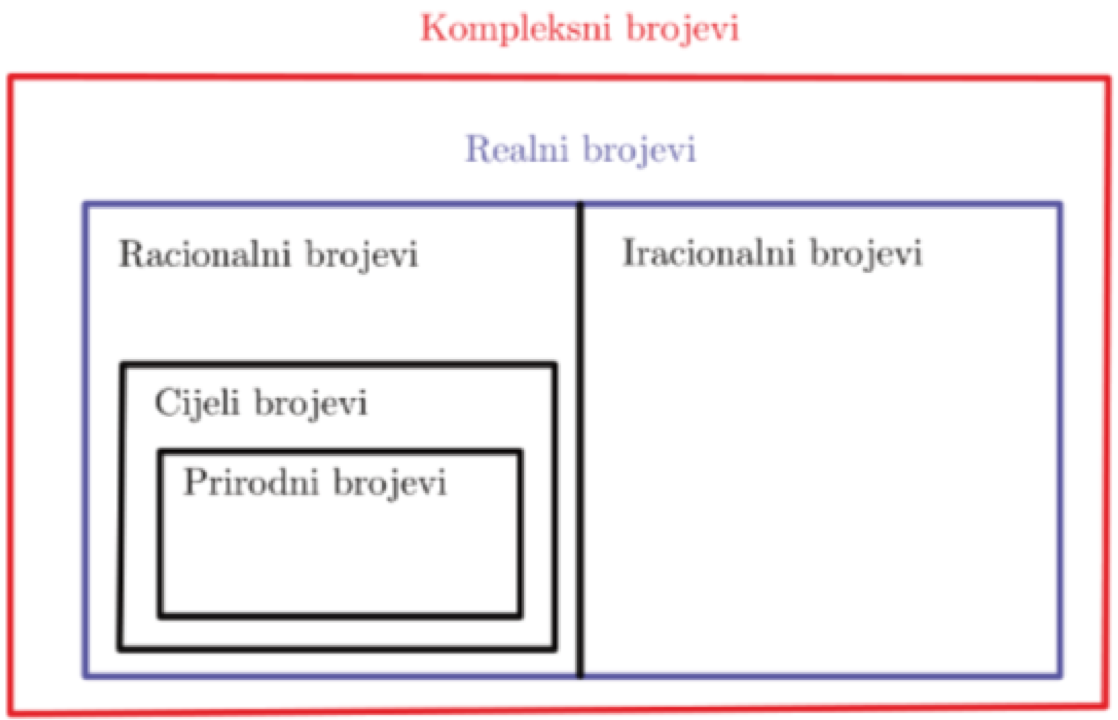
Zadatak 1:

Odredimo realan broj a za koji kompleksan broj $z = a(a - 3) + (2a - 4)i$ ima jednak realan i imaginaran dio.

Rješenje

S obzirom na to da $\mathrm{Re}\ z = a(a - 3)$ i $\mathrm{Im}\ z = 2a - 4$ moraju biti jednaki, rješavamo jednadžbu $a(a - 3) = 2a - 4$.

$a^2 - 5a + 4 = 0$, pa je $a \in \{1, 4\}$.



$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

$\mathbb{I} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

• Jednakost kompleksnih brojeva

Dva su kompleksna broja z_1 i z_2 jednaka ako i samo ako imaju iste realne i iste imaginarne dijelove.

$$z_1 = z_2 \Leftrightarrow \operatorname{Re} z_1 = \operatorname{Re} z_2 \text{ i } \operatorname{Im} z_1 = \operatorname{Im} z_2$$

Primjer 3.

Odredite realne brojeve a i b iz jednakosti $3a + (2 - b)i = -6 - 4i$.

Rješenje

Kompleksni broj $z_1 = 3a + (2 - b)i$ jednak je kompleksnom broju $z_2 = -6 - 4i$ pa ćemo izjednačiti njihove realne i imaginarne dijelove.

$3a = -6$

$2 - b = -4$

Slijedi da je $a = -2$ i $b = 6$.

Zadatak 2: Odredite realne brojeve a i b iz jednakosti $4(a - 2b) + (a - b)i = 4 + 2i$.

Rješenje: $a = 3$, $b = 1$.

Za kompleksan broj $z = x + yi$, broj $\overline{z} = x - yi$ nazivamo kompleksno konjugirani broj broja z.

Primjer 4: Odredimo kompleksno konjugirane brojeve sljedećih brojeva:

$$z_1 = 2 + 3i, \quad z_2 = -1 - \sqrt{3}i, \; z_3 = 4, \quad z_4 = 2i, \; z_5 = 0.$$

Rješenje: $\overline{z_1} = 2 - 3i$, $\overline{z_2} = -1 + \sqrt{3}i$, $\overline{z_3} = 4$, $\overline{z_4} = -2i$, $\overline{z_5} = 0$.

Pokažimo čemu je jednak umnožak dvaju kompleksno konjugiranih brojeva.
Neka je $z = x + yi$.

Tada vrijedi $z \cdot \overline{z} = (x + yi) \cdot (x - yi) = x^2 - (yi)^2 = x^2 + y^2$.

Ta će nam jednakost pomoći pri dijeljenju kompleksnih brojeva.

Zadaci za DR:

1.Odredi realni i imaginarni dio kompleksnih brojeva:

$a)\ z_1 = 2 - 3i$ $\quad b)\ z_2 = 5i - 1$ $\quad c)\ z_3 = 4$ $\quad d)\ z_4 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i.$

2. Odredi kompleksno konjugirane brojeve slijedećih brojeva:

$a)\ z_1 = 4 - 3i$ $\quad b)\ z_2 = 5i - 1$ $\quad c)\ z_3 = 2$ $\quad d)\ z_4 = -\frac{1}{2}i.$

3. Odredi realni broj *k* tako da kompleksni brojevi z_1i z_2 budu jednaki:

$a)\ z_1 = 2 - ki,\ z_2 = 2 - 5i$ $\quad b) z_1 = (2 - k) + 3i,\ z_2 = 5 + 3i.$